Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 20.04.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: (3 Punkte) Sei $S_< = \{<\}$ die Sprache für Ordnungen.

(a) Geben Sie die Axiome für Totalordnungen in der Sprache $S_<$ an. Dabei dürfen Sie (auch in den folgenden Aufgaben) zusätzlich zu den Symbolen aus $S_< \cup S_0 = \{<, \equiv, \neg, \rightarrow, \perp, \forall, (,), v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ auch die Symbole $\vee$ (oder), $\wedge$ (und) und $\exists$ verwenden.

(b) Geben Sie 2 zusätzliche Axiome in der Sprache $S_<$ an, die die Eigenschaft beschreiben, dass es kein kleinstes und kein größtes Element bezüglich $<$ gibt.

(c) Geben Sie ein zusätzliches Axiom in der Sprache $S_<$ an, welches die Dichtheit von $<$ beschreibt - dabei ist eine Ordnung $<$ *dicht* wenn zwischen zwei verschiedenen Elementen der Ordnung immer ein weiteres liegt.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Betrachten Sie die Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, f)$, wobei f eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Formalisieren Sie folgende Aussagen über diese Struktur in der Sprache $S = \{+, \cdot, 0, 1, <, f\}$. Wie in Aufgabe 1 dürfen Sie außer den Symbolen aus $S \cup S_0$ auch die Symbole aus $\{\vee, \wedge, \exists\}$ verwenden.

- f ist überall positiv.
- f ist nirgendwo negativ.
- f ist monoton wachsend.
- f ist uniform stetig.
- f ist überall differenzierbar.

Definition 1. *Eine* Torsionsgruppe *ist eine Gruppe* $(G, e, \circ)$ *in der es ein Element* $x \neq e$ *gibt so dass für eine natürliche Zahl* $n \neq 0$ *gilt*

$$\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n} = e.$$

Ist eine Gruppe $(G, e, \circ)$ *keine Torsionsgruppe, so nennen wir diese torsionsfrei.*

Definition 2. *Die Sprache der Gruppentheorie* $S_{Gr} = \{\circ, e\}$.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Geben Sie eine (unendliche) Liste von Axiomen in der Sprache S_{Gr} an, die die torsionsfreien Gruppen beschreiben. Dabei müssen Sie die gewöhnlichen Gruppenaxiome nicht nochmals auflisten. Überlegen Sie informell, warum ein ähnliches Vorgehen nicht (oder zumindest nicht auf naheliegende Weise) möglich ist, um Axiome für die Torsionsgruppen anzugeben.

Definition 3. *Ist* t *ein Term in einer Sprache* S*, so bezeichnen wir die Anzahl der in* t *auftretenden Symbole als die Länge von* t*, wobei wir mehrfach auftretende Symbole auch mehrfach zählen. Ist etwa* $S = S_{Gr}$*, so sind* $e, v_0, v_1, \ldots$ *Terme der Länge* 1*, und etwa ist* $\circ \circ v_0 e v_{17}$ *ein Term der Länge* 5.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jeder Term $t \in T^{S_{Gr}}$ in der Sprache der Gruppentheorie ungerade Länge $2n + 1$ hat, wobei n gleich der Anzahl der in t auftretenden $\circ$-Symbole ist.